$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}$での基本原理 (超函数と線型微分方程式 II)

大島, 利雄

数理解析研究所講究録
209巻 1974年 78-86

$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}$ での基本原理

東大 理　　大島 利雄

§0. 序

本稿では，"コンパクト多様体×時間" における大域的な線型偏微分方程式論の最も簡単な例として，"$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}$" での定数係数線型偏微分方程式（ある種の合成積方程式も含めて）の一般論を扱う．具体的には，可解性，同次解の表示，解の正則性，解の一意性，初期値問題，境界値問題等を扱う．

§1. 定義と記号

・ $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \equiv \mathbb{R}^n/\sim$

ただし，$x = (x_1, \cdots, x_n)$，$x' = (x'_1, \cdots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し $x'_i = x_i + 2\pi\alpha_i$ を満たす $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ が存在する時，$x \sim x'$ と定義する．

・ $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$: 開区間 $(-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty)$

I の元を t で表わす．

・ $M \equiv T^n \times I$

・ $\pi : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & I \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (x, t) & \longmapsto & t \end{array}$ projection

・ $\mathcal{A}(M)$: M 上の実解析函数全体.

・ $\mathcal{A}(\overline{M}) \equiv \varinjlim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{A}(T^n \times (a-\varepsilon, b+\varepsilon))$

・ $\mathcal{O}(I \times i\mathbb{R})$: $I \times i\mathbb{R}$ 上の正則函数全体

・ $\mathcal{B}(M)$: M 上の hyperfunction 全体

・ $\mathcal{B}_0 \equiv \{ g \in \mathcal{B}(M) ; \ supp\ g \subset \pi^{-1}(0) \}$

すべての $g \in \mathcal{B}_0$ は

$$(1.1) \quad \begin{aligned} g &= \sum_{i \geq 0} g_i(x)\, \delta^{(i)}(t) \qquad (g_i \in \mathcal{B}(T^n)) \\ &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^n \\ i \geq 0}} \tilde{g}_i(\alpha)\, e^{\sqrt{-1}\langle \alpha, x \rangle}\, \delta^{(i)}(t) \qquad (\tilde{g}_i \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}) \end{aligned}$$

と展開される. ただし,

$$(1.2) \quad \overline{\lim_{|\alpha|+i \to \infty}} \sqrt[|\alpha|+i]{|\tilde{g}_i(\alpha)|\, C^i} \leq 1 \quad \text{for } \forall C > 0.$$

・ $\mathrm{ord}\ g \equiv \min \{ k \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\} ; \ g_j(x) \equiv 0 \ \text{for } \forall j > k \}$

・ $\mathcal{B}_0^f \equiv \{ g \in \mathcal{B}_0 ; \ \mathrm{ord}\ g < \infty \}$

以下, $g \in \mathcal{B}_0^f$ とする.

・ $|g|_\alpha \equiv \max_{i \geq 0} |\tilde{g}_i(\alpha)|$ (cf. (1.1))

・ $\tau_j(\alpha, g)$ $(1 \leq j \leq m_\alpha)$ を τ に関する次の方程式

$$\sum_i \tilde{g}_i(\alpha)(\sqrt{-1}\,\tau)^i = 0$$

の根達とする．（$0 \leq m_\alpha \leq \mathrm{ord}\, g$ である）

・合成積による写像

$$g* : \quad f \longmapsto (2\pi)^{-n} \int g(x', t') f(x-x', t-t')\, dx' dt'$$

によって，$\mathcal{B}_0^f$ は環をなし，$\mathcal{A}(M)$，$\mathcal{A}(\overline{M})$，$\mathcal{B}(M)$ はすべて $\mathcal{B}_0^f$－加群となる。上のようにして与えられる写像は，任意の有限階定数係数偏微分作用素による写像を含んでいることに注意しよう．

・$\mathrm{Mat}(k, \mathcal{B}_0^f)$: $\mathcal{B}_0^f$ の元を成分とする k 次正方行列．

<u>定理 1.1.</u>　$f \in \mathcal{B}(M)$ は次のような表示をもつ．

$$(1.3) \qquad f = \Big[\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} F_\alpha(z)\, e^{\sqrt{-1}\langle \alpha, x \rangle} \Big]$$

ただし，$F_\alpha \in \mathcal{O}(I \times \sqrt{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ で，

$$\overline{\lim_{|\alpha| \to \infty}} \sqrt[|\alpha|]{|F_\alpha|_K} \leq 1, \quad {}^\forall K : \text{compact} \subset I \times \sqrt{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$f = 0$ となるためには，$F_\alpha \in \mathcal{O}(I \times \sqrt{-1}\mathbb{R})$ で，

$$\overline{\lim_{|\alpha| \to \infty}} \sqrt[|\alpha|]{|F_\alpha|_K} \leq 1, \quad {}^\forall K : \text{compact} \subset I \times \sqrt{-1}\mathbb{R}$$

を満たすことが，必要十分．

ここで，$|F_\alpha|_K \equiv \sup_{z \in K} |F_\alpha(z)|$

注意1.2. (1.3)において，F_α の定義する $\mathcal{B}(I)$ の元は，$(2\pi)^{-n}\int_{T^n} f(x,t)\, e^{-\sqrt{-1}\langle\alpha, x\rangle}\, dx$ によって与えられるが，これらがすべての $\alpha\in\mathbb{Z}^n$ に対して 0 であっても，f が 0 であるとは限らない．逆に，すべての $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ $(f_\alpha\in\mathcal{B}(I))$ に対して，$f_\alpha(x) = (2\pi)^{-n}\int_{T^n} f(x,t)\, e^{-\sqrt{-1}\langle\alpha, x\rangle}\, dx$ となる $f\in\mathcal{B}(M)$ が存在する．

定義1.3. $f\in\mathcal{B}(M)$ が $\pi^{-1}(t_0)$ $(t_0\in I)$ に制限可能な時（すなわち，$S.S.f \cap \sqrt{-1}S^*_{\pi^{-1}(t_0)}M = \phi$），その制限を $f|_{\pi^{-1}(t_0)}$ と書く． $t\in I$ が a に十分近い時 $f|_{\pi^{-1}(t)}$ が存在し，さらに，$t\to a$ の時，$\mathcal{B}(T^n)$ の位相で $f|_{\pi^{-1}(t)}$ が収束するならばその極限を $f|_{\pi^{-1}(a)}$ と書き，f の $\pi^{-1}(a)$ への trace が存在すると定義する．

§2. 結果

以下，$f\in \mathrm{Mat}(k, \mathcal{B}_0^f)$ とする．

定理2.1. $f_* : (\mathcal{B}_0^f)^k \longrightarrow (\mathcal{B}_0^f)^k$ が injective

$\Leftrightarrow$

(A.1) $\quad |\det f|_\alpha \neq 0 \quad , \quad \forall\alpha\in\mathbb{Z}^n$

定理2.2. $f_* : (\mathcal{B}_0^f)^k \longrightarrow (\mathcal{B}_0^f)^k$ が surjective

$\Leftrightarrow$

$\mathrm{ord}(\det f) = 0$ かつ (A.1) かつ

(A.2.) $$\varliminf_{|\alpha|\to\infty} \sqrt[|\alpha|]{|\det f|_\alpha} \geqq 1$$

<u>定理 2. 3.</u> (解の一意性)

$f*: \mathcal{B}(M)^k \longrightarrow \mathcal{B}(M)^k$ が injective

$\Leftrightarrow$

$\operatorname{ord}(\det f) = 0$ かつ (A.1) かつ

(A.3) $$\varliminf_{|\alpha|\to\infty} \sqrt[|\alpha|]{|\det f|_\alpha} > 0$$

特に, $f, f' \in \mathcal{B}_0^f$ の時は, (i.e. $k = 1$)

$\ker(f*) \subset \ker(f'*)$

$\Leftrightarrow$

$|f|_\alpha = 0 \Rightarrow |f'|_\alpha = 0$ かつ

$$\varliminf_{\substack{|\alpha|\to\infty \\ |f'|_\alpha \neq 0}} \sqrt[|\alpha|]{|f|_\alpha / |f'|_\alpha} > 0$$

<u>注意 2.4.</u> $f*: \mathcal{A}(M)^k \longrightarrow \mathcal{A}(M)^k$ が injective

$\Leftrightarrow$

$\operatorname{ord}(\det f) = 0$ かつ (A.1)

<u>定理 2. 5.</u> (可解性)

$f*: \mathcal{B}(M)^k \longrightarrow \mathcal{B}(M)^k$ が surjective

$\Leftrightarrow$

(A.1) かつ (A.2) が成立.

特に, $f, f' \in \mathcal{B}_0^f$ の時は,

$\operatorname{im}(f*) \supset \operatorname{im}(f'*)$

$\Leftrightarrow$

$$\varliminf_{\substack{|\alpha|\to\infty \\ |f'|_\alpha \neq 0}} \sqrt[|\alpha|]{|f|_\alpha / |f'|_\alpha} \geqq 1 \quad \text{かつ} \quad |f|_\alpha = 0 \Rightarrow |f'|_\alpha = 0$$

<u>注意2.6.</u>　定理2.5は，$\overline{M}$がcompactならば，$\mathcal{B}(M)$を$\mathcal{A}(\overline{M})$に置き換えてもそのまま成立する．$\mathcal{A}(M)$の場合はどうなるか？

$\overline{M}$がcompactの時，$\varphi_i(x) \in \mathcal{A}(T^n)$ならば，

$$\Big(\sum_{0\le i\le k} \varphi_i(x)\,\delta^{(i)}(t)\Big) * \mathcal{A}(\overline{M}) \subsetneqq \mathcal{A}(\overline{M})$$

であるが，$\displaystyle\bigcup_{\varphi\in\mathcal{A}(T^n)} \big(\varphi(x)\,\delta(t) * \mathcal{A}(\overline{M})\big) = \mathcal{A}(\overline{M})$

<u>定理2.7.</u>（同次解の表示）

$f = \displaystyle\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^n\\ i\ge 0}} \tilde{f}_i(\alpha)\, e^{\sqrt{-1}\langle\alpha,x\rangle}\,\delta^{(i)}(t) \in \mathrm{Mat}(k, \mathcal{B}_0^f)$ が(A.3)を満たす．

$\Leftrightarrow$ $f * u = 0$ を満たす $\forall u \in \mathcal{B}(M)^k$ は，次のように表わすことができる．（cf.（1.3））

$$u = \Big[\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} U_\alpha(z)\, e^{\sqrt{-1}\langle\alpha,x\rangle}\Big] \quad \text{において}$$

$$\sum_{i\ge 0} \tilde{f}_i(\alpha)\Big(\frac{d}{dz}\Big)^i U_\alpha(z) = 0 \quad , \forall\alpha \in \mathbb{Z}^n.$$

<u>定理2.8.</u>（解の正則性）

・$f * u = 0$; $u \in \mathcal{B}(M)^k \Rightarrow u \in \mathcal{A}(M)^k$

$\Leftrightarrow$ (A.1) かつ (A.3) かつ

(A.4) $$\varlimsup_{\substack{|\alpha|\to\infty\\ 1\le i\le m_\alpha}} \frac{|\alpha| + |\mathrm{Re}\,\tau_i(\alpha, \det f)|}{|\mathrm{Im}\,\tau_i(\alpha, \det f)|} < \infty .$$

・$f * u \in \mathcal{A}(M)^k$, $u \in \mathcal{B}(M)^k \Rightarrow u \in \mathcal{A}(M)^k$

$\Leftrightarrow$ (A.1) かつ (A.2) かつ (A.4)．

<u>例 2.9.</u>　$M = T^1 \times \mathbb{R}$ とする．

$\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial^k}{\partial x^k}$ に対して，定理 2.8 の条件が成立するための必要十分条件は，どちらの場合も

$$\begin{cases} k \text{ が } 0 \text{ 以外の偶数の時} & c \notin \sqrt{-1}\,\mathbb{R} \\ k \text{ が奇数の時} & c \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

また，$M = T^2 \times \mathbb{R}$ のとき，$\frac{\partial}{\partial t} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}$ は，定理 2.8 の条件を満たす．

<u>以下，$f = \delta'(t) - g(x)\delta(t)$，$g(x) \in Mat(k, \mathcal{B}(T^n))$ を仮定する．</u>

<u>定理 2.10.</u>（条件付解の一意性）

次の (1) ～ (3) のいずれかが成立すれば，

$$f * u = 0,\quad u \in \mathcal{B}(M)^k \quad \Rightarrow \quad u = 0$$

(1) u が $\pi^{-1}(0)$ のある近傍で零．

(2) u の $\pi^{-1}(0)$ への制限が存在して，$u|_{\pi^{-1}(0)} = 0$．

(3) u の $\pi^{-1}(a)$ への trace が存在して，$u|_{\pi^{-1}(a)} = 0$．

<u>問題 2.11.</u> " $f * u = 0$ を満たす $u \in \mathcal{B}(M)^k$ は，M のある点の近傍で 0 なら，$u \equiv 0$ " となるための f の満たすべき必要十分条件は何か？．たとえば，f が (A.10)（後述）を満たす時，上の "　　" は成立するか？．

定理 2.12. (制限の存在)

$f * u = 0,\ u \in \mathcal{B}(M)^k \Rightarrow u|_{\pi^{-1}(0)}$ が存在.

$\Leftrightarrow$

(A.5) $$\varlimsup_{\substack{|\alpha| \to \infty \\ 1 \le i \le k}} \frac{|\mathrm{Re}\, r_i(\alpha, \det f)|}{|\alpha| + |\mathrm{Im}\, r_i(\alpha, \det f)|} < \infty .$$

定理 2.13. (trace の存在)

$f * u = 0,\ u \in \mathcal{B}(M)^k \Rightarrow u|_{\pi^{-1}(a)}$ が存在.

$\Leftrightarrow$

(A.5) かつ

(A.6) $$\varlimsup_{\substack{|\alpha| \to \infty \\ 1 \le i \le k}} \frac{\mathrm{Im}\, r_i(\alpha, \det f)}{|\alpha|} < \infty .$$

系 2.14. (両側への trace の存在)

$f * u = 0,\ u \in \mathcal{B}(M)^k \Rightarrow u|_{\pi^{-1}(a)},\ u|_{\pi^{-1}(b)}$ が存在

$\Leftrightarrow$

(A.7) $$\varlimsup_{\substack{|\alpha| \to \infty \\ 1 \le i \le k}} \frac{|r_i(\alpha, \det f)|}{|\alpha|} < \infty .$$

定理 2.15. (初期値問題)

" $\forall g \in \mathcal{B}(T^n)^k,\ \exists u \in \mathcal{B}(M)^k$

s.t. $f * u = 0,\ u|_{\pi^{-1}(a)} = g$ "

$\Leftrightarrow$

(A.8) $$\varlimsup_{\substack{|\alpha| \to \infty \\ 1 \le i \le k}} \frac{\mathrm{Im}\, r_i(\alpha, \det f)}{|\alpha| + |\mathrm{Re}(\alpha, \det f)|} \le 0 .$$

系 2.16. $\{u \in \mathcal{B}(M)^k ;\ f * u = 0\}$ から $\mathcal{B}(T^n)^k$ への写像 $u|_{\pi^{-1}(a)}$ (又は, $u|_{\pi^{-1}(0)}$) が well-defined でかつ bijective.

$\Leftrightarrow$

(A.9) $$\overline{\lim_{\substack{|\alpha|\to\infty \\ 1\leq i\leq k}}} \frac{|\mathrm{Re}\,\tau_i(\alpha, \det f)|}{|\alpha|} < \infty, \quad \lim_{|\alpha|\to\infty} \frac{\mathrm{Im}\,\tau_i(\alpha, \det f)}{|\alpha|} = 0.$$

このとき，f* を wave-type とよぶ.

f* が定理2.8の条件と，定理2.15の条件とを満たす時，（すなわち，(A.4) と (A.8)），f* は t の正の方向に heat type であるとよぶ.

f* が次の条件を満たす時，shrödinger type とよぶ.

(A.10) $$\lim_{\substack{|\alpha|\to\infty \\ 1\leq i\leq k}} \frac{|\alpha| + |\mathrm{Im}\,\tau_i(\alpha, \det f)|}{|\mathrm{Re}\,\tau_i(\alpha, \det f)|} = 0.$$

おわり